

Análise dinâmica da volatilidade dos retornos do Ibovespa: uma aplicação do modelo autorregressivo de mudanças markovianas

O presente artigo utiliza o modelo Markov Switching Autorregressivo de dois estados desenvolvido por Hamilton (1989), para capturar mudanças de regime tanto na média quanto na variância dos retornos do Ibovespa, entre janeiro de 2000 e maio de 2020. A evidência empírica indica probabilidades de transição sugerindo que apenas eventos podem mudar a série de um regime de baixa volatilidade para um regime de alta volatilidade e vice-versa. Verificou-se que os resultados do modelo MS(2)-AR(1) detectaram momento das mudanças de regimes dos retornos, por causa da eleição presidencial, crises financeiras 2008 e a pandemia (coronavírus 2020).

Palavras-chave: Ibovespa; Modelo Markov Switching Autorregressivo; Probabilidade de Transição; Duração de Regime.

Dynamic analysis of the volatility of Ibovespa returns: an application of the Markov Switching autoregressive model

The present article uses the two-state Markov Switching autoregressive model developed by Hamilton (1989), to capture regime changes both in the mean and in the variance of Ibovespa returns, between January 2000 and May 2020. The empirical evidence indicates probabilities of transition suggesting that only events can change the series from a low volatility regime to a high volatility regime and contrary. It was found that the results of the MS(2)-AR(1) model detected moment of changes in returns regimes, because of the presidential election, financial crises 2008 and the pandemic (coronavírus 2020).

Keywords: Ibovespa; Markov Switching Autoregressive Model; Probability of Transition; Regime Duration.

Topic: **Finanças Empresariais**

Received: **07/10/2020**

Approved: **21/12/2020**

Reviewed anonymously in the process of blind peer.

Carlos Alberto Gonçalves da Silva 
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Brasil
<http://lattes.cnpq.br/4301394305558781>
<http://orcid.org/0000-0002-6827-5073>
ca7gon@gmail.com



DOI: 10.6008/CBPC2179-684X.2020.004.0001

Referencing this:

SILVA, C. A. G.. Análise dinâmica da volatilidade dos retornos do Ibovespa: uma aplicação do modelo autorregressivo de mudanças markovianas. **Revista Brasileira de Administração Científica**, v.11, n.4, p.1-9, 2020. DOI: <http://doi.org/10.6008/CBPC2179-684X.2020.004.0001>

INTRODUÇÃO

O presente artigo utilizou-se modelo Markov Switching Autorregressivo de dois estados desenvolvido por Hamilton (1989), para capturar mudanças de regime tanto na média quanto na variância dos retornos do Ibovespa compreendendo o período entre janeiro de 2000 e maio de 2020.

A seguir realiza-se um breve comentário de alguns trabalhos aplicando modelos de Markov Switching conjuntamente com modelos ARIMA, VAR e GARCH. Schwert (1989) considera em que as rentabilidades do mercado acionário podem ter uma variação de alta e baixa determinadas por um processo de Markov de dois estados.

Hamilton (1989) utilizam um modelo com mudanças, no que diz respeito à volatilidade. Segundo os autores o modelo com mudança de regime, aplicado aos retornos do mercado acionário americano, ajusta-se melhor aos dados do que os modelos ARCH sem mudança de regime.

Krolzig (1997) com base no estudo realizado por Hamilton (1989) acrescentou modelos multivariados (VAR). O estudo analisou os ciclos econômicos internacionais com atenção especial ao caso da Alemanha. Foram encontradas relações de causalidade entre as fases de ciclos econômicos entre diferentes economias.

Ang et al. (2002) aplicaram através de modelo não linear nas taxas de juros dos EUA, Alemanha e Reino Unido. Assim, os autores mostraram que os regimes das taxas de juros correspondem razoavelmente bem com os ciclos econômicos dos EUA, tendo extrema importância para estudar os efeitos dos choques da política monetária sobre a economia.

Ismail et al. (2006) usaram teste de mudança de regime em seu estudo para detectar características não lineares nas taxas de câmbio de três países Asiáticos. Eles detectaram que a hipótese nula de linearidade é rejeitada e há evidências de quebras estruturais nas séries das taxas de câmbio.

Wink Júnior et al. (2014) testaram a hipótese de não linearidade da sensibilidade do retorno de ativos de empresas gaúchas em diferentes regimes markovianos de risco: períodos de crise e de estabilidade. Consideraram três ativos de empresas gaúchas negociáveis na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). Os resultados mostraram que o modelo não linear (MS-CAPM) é o mais adequado. Além disso, as evidências de que os ativos são mais suscetíveis às variações macroeconômicas em tempos de crise do que em períodos de estabilidade.

Mahjoub et al. (2019) aplicaram o modelo Markov Switching com dois regimes, para identificar os períodos de formação e explosão de bolhas especulativas no mercado de capitais do Irã. O regime 1 é o crescimento de bolhas e o estágio de explosão e o regime 2 identifica a perda de bolhas. O resultado da pesquisa mostra que índice de ações do mercado de capitais iraniano no período analisado teve 18 meses de bolhas e 66 meses de equilíbrio.

Vários autores desenvolveram trabalhos utilizando-se modelos Markov Switching, pode-se citar Kim (1994), Norden et al. (1995), Oliveira et al. (2018), Krolzig et al. (2004), Assoe (1998) e Safaei et al. (2012).

REVISÃO TEÓRICA

O modelo Markov Switching autorregressivo

O modelo Markov Switching (MS) foi introduzido por Hamilton (1989). O modelo Markov Switching autorregressivo (MS-AR) de dois estados (ou regimes) com um processo de ordem AR (p) é escrito como:

$$y_t = \begin{cases} c_1 + \alpha_{11}\gamma_{t-1} + \dots + \alpha_{p1}\gamma_{t-p} + \varepsilon_t & S_t = 1 \\ c_2 + \alpha_{12}\gamma_{t-1} + \dots + \alpha_{p2}\gamma_{t-p} + \varepsilon_t & S_t = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Onde os regimes do modelo (1) são indexados por S_t . Os parâmetros da parte autorregressivas e do intercepto dependem do regime no tempo t . Os regimes são assumidos como variáveis não observáveis discretas. O regime 1 descreve os períodos de tendência de baixa volatilidade do Ibovespa e o regime 2 indica os períodos de tendência de alta volatilidade do Ibovespa.

A transição de probabilidades entre os regimes é realizada por um processo de Markov de primeira ordem da seguinte maneira:

$$\rho_{ij} = \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i)$$

em que ρ_{ij} refere-se à probabilidade de estar no regime j dado que o processo encontra-se no regime i , onde

$$\sum_{i=1}^N \rho_{ij} = 1 \text{ para todo } i, j \in (1, 2, \dots, N).$$

As probabilidades de transição em uma matriz quadrada de ordem N , conhecida como matriz de transição e denotada por P , tem a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde

$$\rho_{11} = P[s_t = 1; s_{t+1} = 1]$$

$$\rho_{12} = P[s_t = 2; s_{t+1} = 1]$$

$$\rho_{21} = P[s_t = 1; s_{t+1} = 2]$$

$$\rho_{22} = P[s_t = 2; s_{t+1} = 2]$$

$$\rho_{11} + \rho_{12} = 1 \quad \text{e} \quad \rho_{21} + \rho_{22} = 1$$

Assim, admite-se que a matriz de transição é irredutível e ergódica (se um dos valores próprios da matriz de transição for igual à unidade e todos os outros autovalores estiverem dentro do círculo unitário). Com essas condições, existe uma distribuição de probabilidade estacionária dos regimes (KROLZIG, 1997). As probabilidades ergódicas podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$\rho_1 = (1 - \rho_{11}) / (2 - \rho_{11} - \rho_{22})$$

$$\rho_2 = (1 - \rho_{22}) / (2 - \rho_{11} - \rho_{22})$$

A probabilidade de se estar no regime 1 em equilíbrio é obtida por ρ_1 e a probabilidade de se estar no regime 2 é determinada por ρ_2 .

O estimador de máxima verossimilhança é utilizado para determinar os parâmetros dos MS (N)-AR(p). Portanto, a função de probabilidade do log do modelo com dois regimes é expressa da seguinte maneira:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{j=1}^2 f(y_t | S_t, y_{t-1}) \Pr(S_t = j | Y_{t-1}) \right\} \quad (3)$$

Onde o termo $\Pr(S_t = j | y_{t-1})$ é a probabilidade de estar em cada regime. Dado $\Pr(S_{t-1} = i | y_{t-1})$, $i = 1, 2$ no início do tempo t , as probabilidades de estar em cada regime são obtidas da seguinte maneira:

$$\Pr(S_t = j | y_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i) \Pr(S_{t-1} = i | y_{t-1}), \quad (4)$$

onde $\Pr(S_t = j | S_{t-1} = i)$, $j = 1, 2$; $i = 1, 2$ são probabilidades de transição dos elementos da matriz P , consideradas constantes. A possibilidade de se estar em regime ou em outro regime, pode ser alterada através do desempenho macroeconômico e das informações obtidas do mercado acionário.

Finalmente, a partir da matriz de transição (2) determina a duração esperada de cada regime. Quanto mais próxima a probabilidade estiver de um, leva mais tempo para mudar de outro regime. Assim a duração esperada pode ser expressa como:

$$\text{Duração esperada}(D_i) = \frac{1}{1 - \rho_{ij}} \quad (5)$$

O tempo de duração em cada um dos dois regimes pode ser determinado como:

$$D_1 = 1/(1 - \rho_{11}) \quad D_2 = 1/(1 - \rho_{22})$$

Teste de linearidade (BDS)

Uma vez detectada que a distribuição não é normal, faz-se necessário testar o modelo para linearidade. Este teste foi desenvolvido por Brocke et al. (1996), usado para testar se as variáveis aleatórias que compõem uma série são independentes e identicamente distribuídas (IID), ou seja, pode verificar várias situações em que as variáveis não são IID, tais como não estacionariedade, não linearidade e caos determinístico. O teste se baseia no conceito de correlação espacial da teoria do caos e segundo os autores a estatística BDS é formulada como:

$$W_m^n(\varepsilon) = \frac{\sqrt{N} (C_m^n(\varepsilon) - (C_1^n(\varepsilon))^m)}{\sigma_m(\varepsilon)} \quad (6)$$

Onde $W_m^n(\varepsilon)$ converge para uma distribuição normal $N(0, 1)$, à medida que n tende para infinito. Assim sendo, os testes de hipóteses são:

H_0 : a série segue um processo *iid* (independente e identicamente distribuído).

H_1 : a série não segue um processo *iid* (independente e identicamente distribuído).

METODOLOGIA

Dados

Os dados utilizados neste estudo se referem aos índices mensais Bovespa, compreendendo o período de Janeiro de 2000 a maio de 2020, num total de 245 observações mensais. Os dados foram obtidos do *site Yahoo finance*.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os retornos mensais foram calculados através da fórmula: $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$. Sendo que P_t representa o número de pontos no fechamento no dia t e P_{t-1} o número de pontos no fechamento no dia anterior ($t-1$). As Figuras 1 e 2 mostram o comportamento das séries de cotações e retornos mensais do Ibovespa no período considerado

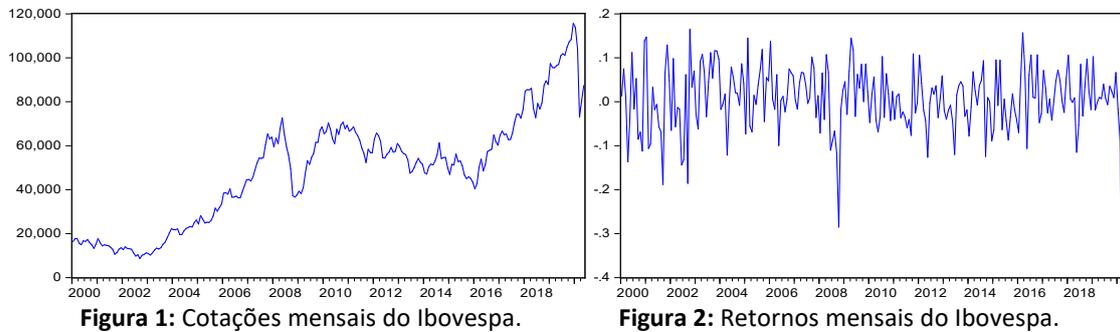


Figura 1: Cotações mensais do Ibovespa.

Figura 2: Retornos mensais do Ibovespa.

Na inspeção visual da Figura 2, dentro do período de análise, nota-se uma acentuada volatilidade nos retornos. Assim, foi preciso testar a normalidade e estacionariedade da série dos retornos do Ibovespa para aplicação do modelo MS-AR.

Algumas estatísticas descritivas básicas são apresentadas na Tabela 1. Observa-se que os retornos mensais do Ibovespa apresentam uma distribuição leptocúrtica devido ao excesso de curtose (5,466301) em relação à distribuição normal (3,0), ou seja, possui calda mais pesada. Verifica-se também que a série é negativamente assimétrica o que indicaria que baixas de mercado acionário são mais prováveis do que altas de mercado. Pela análise dos resultados, constata-se que tanto a média (0,067) quanto a mediana (0,0083) apresentaram valores próximos de zero. A variação entre o valor mínimo (-0,355) e o valor de máximo (0,165) mostrada pela série, pode ser explicada devido algumas oscilações significativas nos retornos dos índices. O baixo valor do desvio-padrão (0,073) indica que, de maneira geral, as altas variações na série ocorreram em poucas ocasiões, ou seja, em períodos de picos positivos e negativos. A estatística de Jarque et al. (1987) indicou a rejeição da normalidade da distribuição da série, com *p-valor* igual a zero.

Tabela 1: Sumário estatístico dos retornos do Ibovespa.

Estatísticas	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio padrão
Valores	0,066886	0,008334	0,164812	-0,355310	0,073232

Estatísticas	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera	p-valor	Observações
Valores	-0,807975	5,466301	8.75057	0,000000	245

O Q-Q Plot representa um dos métodos gráficos mais utilizados na verificação da normalidade de séries temporais. O procedimento empregado consiste na comparação gráfica dos quantis teóricos da distribuição normal com os quantis dos dados amostrais. A Figura 3 mostra a existência de uma relação não linear entre os quantis teóricos e empíricos, bastante acentuada nas caudas das distribuições, indicando caudas mais pesadas na distribuição empírica. Assim sendo, todos os testes rejeitaram a hipótese de normalidade da série analisada.

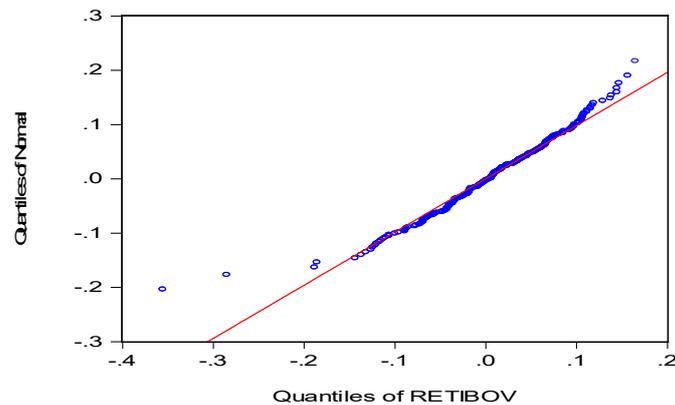


Figura 3: Plot Q-Q dos retornos do Ibovespa.

Os testes Dickey et al. (1981) Aumentado (ADF) (1979) e Phillips et al. (1988) (PP) e Kwiatkowskik, et al. (1992) (KPSS) com constante e com tendência, identificaram que as séries de retornos do Ibovespa são estacionárias e não contém raízes unitárias, conforme se observa na Tabela 2.

Tabela 2: Teste de estacionaridade para a série dos retornos do Ibovespa.

Variável	ADF	Valor Crítico (5%)	PP	Valor Crítico (5%)	KPSS	Valor Crítico (5%)
Ibovespa	-15,5307	-3,4285	-78,6986	-3,4285	00,0655	0,1460

Antes da estimativa do modelo Markov Switching autorregressivo (MS-AR) um teste de não linearidade pode ser necessário descrever as características da série histórica dos retornos do Ibovespa. Assim, na tabela 3 mostra que os resultados apresentados indicam o efeito de não linearidade, ou seja, que as probabilidades são menores que 5% ao nível de significância, implicando uma rejeição da hipótese nula de que a série dos retornos é linearmente dependente.

Tabela 3: Teste à independência temporal do Ibovespa (BDS).

Dimensão	Estatística BDS	Estatística Z	Probabilidade
2	0,01115	2,6263	0,0086
3	0,02225	3,3081	0,0009
4	0,01957	2,4509	0,0143
5	0,02198	2,6494	0,0081
6	0,02438	3,0572	0,0022

O processo de modelagem e escolha dos modelos AR(p), deve testar modelos diferentes e verificar a escolha do mais adequado com base nos menores valores dos critérios de informação Akaike (AIC) e Schwarz (SIC), bem como a estatística de Durbin-Watson (DW) que também detecta a presença de autocorrelação nos resíduos de uma análise de regressão, ou seja, quando DW é aproximadamente igual a 2,0, ele indica que não existe autocorrelação nos resíduos. Desta forma, após várias simulações e com os critérios mencionados anteriormente, a melhor estimativa foi para o AR (1), devido aos menores valores observados para os critérios de AIC e SIC, bem como o coeficiente de Durbin-Watson (DW) mais próximo de 2 (tabela 4).

Após a seleção do número de defasagens do componente autorregressivo (AR), foi determinar o número de regimes do modelo Markov Switching (MS), conforme apresentado na tabela 5. Assim, segundo o critério de informação Schwarz (SIC), o melhor modelo foi de dois regimes, já que apresenta o menor valor

(-2,3444).

Tabela 4: Seleção da ordem do componente autorregressivo AR(p).

Modelo Autorregressivo(AR)	AIC	SIC	DW
AR(1)*	2,3826	-2,3540	1,98
AR(2)	2,3806	-2,3377	1,75
AR(3)	2,3737	-2,3166	1,76
AR(4)	2,3669	-2,2955	1,76

(*) melhor modelo ajustado

Tabela5: Determinação do número de regimes através do critério (SIC)

Modelo	Regimes	SIC
MS	4	-2,2216
MS	3	-2,2819
MS*	2	-2,3444

(*) melhor número de regime do modelo MS-AR.

Na tabela 6 observa-se as estimativas do modelo pelo método da máxima verossimilhança, através do *software OxMetrics 6.0*. O melhor modelo ajustado refere-se ao MS(2)-AR(1), a média e a variância se modificam de acordo com o regime de estado. O regime (1) exprime uma média dos retornos positiva do Ibovespa em conjunto com uma baixa volatilidade. Já no regime (2) mostra um resultado da média negativa e uma alta volatilidade nos retornos do Ibovespa. No regime 1 o retorno médio mensal estimado é de 1,49% (19,42% ao ano) com uma variância de 0,028. Já o regime 2 identifica retorno médio mensal negativo de -2,52% (-34,8% ao ano) com uma variância de 0,108.

No modelo de mudança de regime markoviano, foi possível identificar um regime com retornos negativos e com variância elevada (alta volatilidade ou mercado em baixa) e outro regime com retornos positivos menor variância (baixa volatilidade ou mercado em alta).

Portmanteau indicam que não há presença de autocorrelação dos resíduos. Os resultados dos testes ARCH-LM sugerem a aceitação da hipótese de homocedasticidade do modelo. Quanto aos testes de normalidade Jarque et al. (1987) não se rejeita a hipótese de normalidade. Assim, o modelo apresenta um diagnóstico positivo e um adequado ajuste demonstrado nos resultados dos diversos testes realizados no presente estudo.

Na matriz de transição e persistência dos regimes, verifica-se que o regime atual 1 é mais persistente, ou seja, a probabilidade de permanecer neste regime em período posterior é de aproximadamente de 98,4%, e a de mudar para o regime 2 é da ordem de 6,51%. No regime 2 a probabilidade de continuar neste regime no período t+1 é de 93,49%, enquanto a probabilidade de trocar para o regime 1 é de 1,61%. Assim, para o período de janeiro de 2000 a maio de 2020, a duração esperada do regime atual 1 é de 99 meses. Já no regime 2 a duração estimada é de 15 meses. A probabilidade ergódicas nos períodos de baixa volatilidade é de 81,56% e 18,44% nos períodos de alta volatilidade.

A partir das probabilidades estimadas pode-se obter as datas específicas dos regimes de baixa volatilidade (1) e de alta volatilidade (2), os quais apresentados na tabela 7.

Tabela 6: Estimativa do modelo MS(2)-AR(1) para periodicidade mensal (Janeiro 2000 a Maio 2020)

Regime 1 (baixa volatilidade)			Regime 2 (alta volatilidade)		
Parâmetros	Coeficiente		Parâmetros	Coeficiente	
$\mu(s_1)$	0,0149	(0,002)	$\mu(s_2)$	-0,0252	(0,170)
AR-1(1)	0,0983	(0,190)	AR-1(2)	0,0236	(0,873)
Variância: 0,058355			Variância: 0,108463		
Estatística Descritiva					
Log-likelihood 305.351					
Teste de linearidade (χ^2)(5) 24.604 (0,0002)					
Teste Normalidade (χ^2) 0,81718 (0,6646)					
Teste ARCH (1-2) 0,02220 (0,9781)					
Teste Pormanteau - χ^2 (36lags) 37.999 (0,3784)					
Matriz de Probabilidade de Transição			Período de Duração Média dos Regimes		
	Regime 1	Regime 2	Observações	Probabilidades Ergódicas	Período de Duração
Regime 1	0,9839	0,0161	Regime(1) 199	0,8156	99,5
Regime 2	0,0651	0,9349	Regime(2) 45	0,1844	15,0

Tabela 7: Datas específicas dos regimes: Modelo MS(2)-AR(1)

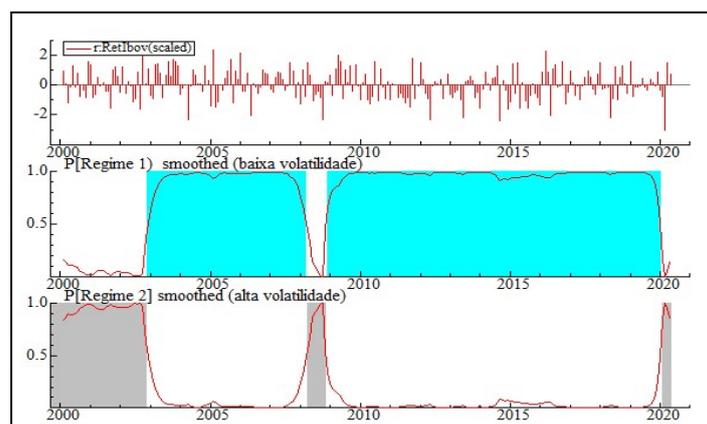
Regime 1 (baixa volatilidade)			Regime 2 (alta volatilidade)		
Período	Meses	Probabilidade	Período	Meses	Probabilidade
2002(12) – 2008(4)	65	0,945	2000(2) – 2002(11)	34	0,931
2008(12) - 2020(1)	134	0,969	2008(5) - 2008(11)	7	0,835
			2020(2) - 2020(5)	4	0,861

Entre o início de 2000 e final de 2003, verifica-se uma tendência de queda devido ao cenário interno e externo mais instável, o atentado terrorista de 11/09/2001 e o momento de transição da política brasileira (vitória de Lula na eleição presidencial 2002).

Em setembro de 2008 teve início a uma queda significativa no índice Bovespa, ocasionada pela crise do subprime deflagrado com a falência de um dos bancos de investimentos dos EUA, o Lehman Brothers, desencadeando uma crise nas bolsas de valores internacionais.

No início de janeiro de 2020, o Ibovespa teve um impacto negativo devido ao coronavírus, que vem gerando fortes turbulências nos mercados mundiais e as políticas de isolamento para conter o avanço da pandemia (covid-19), refletindo na economia os efeitos da paralisação de diversas atividades econômicas.

A figura 4 mostra o comportamento dos retornos, das probabilidades suavizadas e previstas para os regimes de estado do Ibovespa. A probabilidade suavizada considera as informações da amostra completa.

**Figura 4:** Série dos retornos do Ibovespa e as Probabilidades suavizadas do modelo MS(2) – AR(1).

CONCLUSÕES

O objetivo do estudo foi analisar as alterações nos retornos do Ibovespa, entre janeiro de 2000 e maio de 2020, utilizando o modelo Autorregressivo com Mudanças Markovianas desenvolvido por Hamilton (1989). O melhor modelo ajustado refere-se ao MS(2)-AR(1), a média e a variância se modificam de acordo com o regime de estado. O regime (1) exprime uma média dos retornos positiva do Ibovespa em conjunto com uma baixa volatilidade. Já no regime (2) mostra um resultado da média negativa e uma alta volatilidade nos retornos do Ibovespa. No regime 1 o retorno médio mensal estimado é de 1,49% (19,42% ao ano) com uma variância de 0,028. Já o regime 2 identifica retorno médio mensal negativo de -2,52% (-34,8% ao ano) com uma variância de 0,108.

No modelo de mudança de regime markoviano, foi possível identificar um regime com retornos negativos e com variância elevada (alta volatilidade ou mercado em baixa) e outro regime com retornos positivos menor variância (baixa volatilidade ou mercado em alta).

REFERÊNCIAS

ANG, A.; BEKAERT, G.. International Asset Allocation with Regime Shifts. **Review of Financial Studies**, v.15, p.1137-1187, 2002.

ASSOE, K. G.. Regime Switching in emerging stock market returns. **Multinational Finance Journal**, v.2, n.2, p.101-132, 1998.

BROCK, W. A.; DECHERT, W. D.; SCHEINKMAN, J.. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. **Econometric Reviews**, v.15, n.3, p.197-235, 1996.
DOI: <https://doi.org/10.1080/07474939608800353>

DICKEY, D. A.; FULLER, W. A.. Likelihood ratio statistics for autoregressive Time series with unit root. **Econometrica**, v.49, n.4, p.1057-1072, 1981.

HAMILTON, J.. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. **Econometrica**, v.57, p.357-384, 1989.

ISMAIL, M. T.; ISA, Z.. Modelling exchange rates using regime switching models. **Sains Malaysiana**, v.35, n.2, p.55-62, 2006.

JARQUE, C.; BERA, A.. Test for normality of observations and regression residuals. **International Statistical Review**, v.55, n.2, p.163-172, 1987.

KIM, C.-J.. Dynamic linear models with Markov-switching. **Journal of Econometrics**, v.60, p.1-22, 1994.

KROLZIG, H. M.. **Markov-Switching vector autoregressions: modelling, statistical inference, and application to business cycle analysis**. Berlin: Springer, 1997.

KROLZIG, H. M.; TORO, J.. Multiperiod forecasting in stock markets: a paradox solved. **Decision Support Systems**, v.37,

n.4, p.531-542, 2004.

KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P. C. B.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y.. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?. **Journal of Econometrics**, v.54, n.1, p.159-178, 1992.

MAHJOUR, M. R.; CHASKMI, S. A. N.. Identification the Periods of Formation and Bursting of Speculative Bubbles in Iranian Stock Market Using Quantitative Models. **Advances in mathematical finance & applications**, v.4, n.4, p.129-140, 2019.

NORDEN, S. V.; SCHALLER, H.. **Regime Switching in Stock Market Returns**. Berlin: Econometrics, 1995.

OLIVEIRA, A. B.; PEREIRA, P. L. V.. Asset allocation with markovian regime switching: Efficient frontier and tangent portfolio with regime switching. **Brazilian Review of Econometrics**, v.38, n.1, p.97-127, 2018.

PHILLIPS, P. C. B.; PERRON, P.. Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika**, v.75, n.3, p.335-346, 1988.

SAFAEI, M.; MOSTAFAEI, H.. Point Forecast Markov Switching Model for U.S. Dollar/Euro Exchange Rate. **Sains Malaysiana**, v.41, n.4, p.481-488, 2012.

SCHWERT, W.. Business Cycles, Financial Crises, and Stock Volatility. **Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy**, v.31, p.83-126, 1989.

WINK JÚNIOR, M. V.; ZUANAZZI, P. T.. A sensibilidade de ativos em diferentes ambientes de risco: uma análise para empresas gaúchas. **Ensaio FEE**, v.35, n.1, p.231-248, 2014.